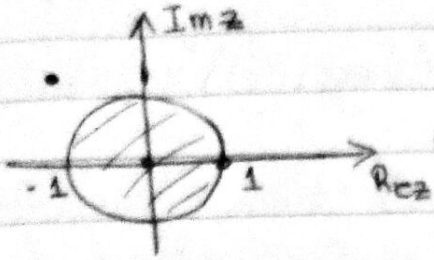
Μάθημα 16ο 19/05/2020

Πρόταση 4.3.2

ολόμορφη για $z+1 \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n , \quad D(0,1).$$



: Δίσκος Σύγκλισης.

Απόδειξη

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.3, δηλαδή από

το $$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n-1}|}{n} \cdot \frac{(n+1)}{|(-1)^n|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$ Άρα η ακτίνα

σύγκλισης είναι $R = 1$. Επομένως:

$$\forall\ z \in D(0,1) : \exists\ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \in \mathbb{C}$$

Θ.4.2.2 $\Longrightarrow$ $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη με

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z}$$

Από την άλλη η $\log(1+z)$, $z \in D(0,1)$ είναι ολόμορφη με $\log(1+z)' = \frac{1}{1+z}$.

$[\, z \in D(0,1) \Leftrightarrow 1+z \in D(1,1) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \,]$

Άρα $\forall z \in D(0,1)$: $f'(z) = (\log(1+z))'$ και

μάλιστα η $f(z) - \log(1+z)$ είναι ολόμορφη στο $D(0,1)$, με $(f(z) - \log(1+z))' = 0$, $\forall z \in \underbrace{D(0,1)}_{\text{ΤΟΠΟΣ}}$

$\overset{\text{Πρόταση}}{\underset{3.3.1}{\Longrightarrow}}$ $f(z) - \log(1+z) = \underset{\in \mathbb{C} \text{ σταθερό}}{c}$, $\forall z \in D(0,1)$

$\Rightarrow \underbrace{f(0)}_{= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} 0^n = 0} - \log 1 = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \boxed{f(z) = \log(1+z) \quad \forall z \in D(0,1)}$

<u>Στρατηγική</u>:

- Ελέγχω αν όντως η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $D(0,1)$
- Λέω ότι είναι ολόμορφη, βρίσκω παράγωγο
  Κοιτάω το πεδίο που παραγωγίζεται
- Κοιτάω την διαφορά των δυο συναρτήσεων f, f' η οποία βγήκε 0 άρα αυτή η διαφορά είναι σταθερή συνάρτηση

$\rightarrow \quad f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad , z \in D(a,R) , R>0$

$$f(z) = c_0 \underbrace{(z-a)^0}_{=1} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (z-a)^m$$

$$\Rightarrow f'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m (z-a)^{m-1}$$

$$\left[= \sum_{m-1=0}^{\infty} ((m-1)+1) c_{(m-1)+1} (z-a)^m \right]$$

Άρα : Προσοχή "Θεώρημα 4.2.2" + Παραδείγματα δυναμοσειρών βασικών συναρτήσεων.

§ 4.4. Αναλυτικές Συναρτήσεις

Ορισμός

$f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$: ανοικτό, ονομάζεται αναλυτική αν μπορώ να την αναπτύξω σε ένα δίσκο $D(a, r(a))$ σε δυναμοσειρά

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(a)(z-a)^m \quad , z \in D(a, r(a))$$

όπου και το κέντρο και η ακτίνα εξαρτάται από το "a".

Ισοδύναμος Ορισμός με τον πάνω

$D \subset \mathbb{C}$: ανοικτό, $f : D \to \mathbb{C}$: αναλυτική $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\, a \in D \ \exists\, r(a)>0 \ . \ (c_n(a))_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$

$\forall\, z \in D(a, r(a)) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n$

Σχόλιο: Για κάθε z=a μπορούν να την αναπτύξω σε δυναμοσειρά

Άρα, γύρω από κάθε $a \in D$ μπορώ να αναπτύξω την f σε δυναμοσειρά σε ένα (ενδεχομένως πολύ μικρό) δίσκο σύγκλισης με κέντρο a και ακτίνα r(a) [που μπορεί να είναι διαφορετική για διαφορετικό a] με συντελεστές $c_n(a)$, $n\in\mathbb{N}$ [που και αυτοί είναι διαφορετικοί για διαφορετικά a.

Θεώρημα 4.4.1

Έστω $D \subset \mathbb{C}$: ανοικτό, $f : D \to \mathbb{C}$. Τότε

f αναλυτική $\Rightarrow$ f: ολόμορφη και

f: άπειρες φορές μιγαδικά διαφορίσιμη με

$f^{(k)} : D \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, δηλ. $f \in C^\infty(D)$

Απόδειξη

Εφόσον f αναλυτική $\Rightarrow$ f αναπτύσσεται τοπικά σε δυναμοσειρά, δηλ.: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n$, $\forall\, z \in D(a, r(a))$.

Τότε από θεώρημα 4.2.2 ξέρω ότι η

f είναι τοπικά ολόμορφη στο D(a, r(a)), δηλ. είναι μιγαδικά διαφ/μη στο D(a, r(a)) άρα και k φορές μιγαδικά διαφ/μη και από Πόρισμα 4.2.1 η $f^{(k)}$ θα είναι:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\overbrace{m!}^{=m+k}}{\underbrace{(m-k)!}_{=m}} c_m(a)\, (z-a)^{\overbrace{m-k}^{=m}},$$

$$, \forall z \in D(a, r(a))$$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+k)!}{m!} c_m(a)\, (z-a)^m$$

<u>Παρατήρηση</u> Αν f ολόμορφη $\Rightarrow$ f αναλυτική

<u>Πχ 4.4.1</u>

$$z^n = ((z-a)+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (z-a)^k, \ z \in \mathbb{C}$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$ γιατί ο πάνω τύπος ισχύει $\forall z \in \mathbb{C}$

Θεωρούμε το πολυώνυμο βαθμού $n \in \mathbb{N}$ (αν $c_n \neq 0$)

$P(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n$, αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά

γύρω από κάθε $a \in \mathbb{C}$ ως:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{m} \tilde{c}_k(a) (z-a)^k \left[= \sum_{n=0}^{m} \underbrace{c_n(a)}_{=\tilde{c}_n(a)} (z-a)^n \right]$$

με ακτίνα σύγκλισης $R(a) = +\infty$

[αφού $\forall r > 0$: $|c_n(a)| r^n$ είναι φραγμένη,

αφού $c_n(a) = 0 \ \forall a \in \mathbb{C}$, από την άλλη

αφού το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά, εδώ πεπερασμένο άθροισμα.]

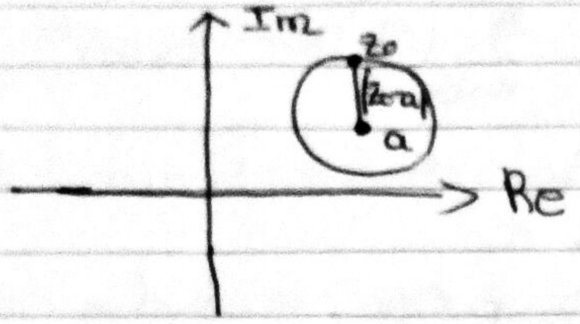
Π x 112

$$f(z) = \frac{1}{(z_0 - z)^m} \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\} , \ m \in \mathbb{N} , \ z_0 \in \mathbb{C} \text{ σταθερό}$$

· ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

· $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ είναι Αναλυτική ???

Δηλαδή μπορώ να την αναπτύξω σε δ.σ. γύρω από κάθε $a \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$???



Ο μέγιστος δίσκος σύγκλισης με κέντρο το "a" της ζητούμενης δ.σ. θα είναι ο $D(a, |z_0 - a|)$

Για $z = z_0$ η f δεν ορίζεται

Όμως για $D(a, |z_0 - a|) \Leftrightarrow |z - a| < |z_0 - a| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right| < 1$$

$$f_{m+1}(z) = \frac{1}{(z_0 - z)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} \frac{1}{(z_0 - a)^{n+1}} (z - a)^{n-m}$$

$\forall z \in D(a, |z_0 - a|)$, $m \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow f_m(z) = \frac{1}{(z_0 - z)^m} = \sum_{n=m-1}^{\infty} \binom{n}{m-1} \frac{1}{(z_0 - a)^{n+1}} (z - a)^{n+1-m} =$$

$\underline{n+1-n=k}$

$n-(m-1)=k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{k+m-1}{m-1} \frac{1}{(z_0-a)^{k+m}}}_{=c_k(a)} \cdot (z-a)^k$$

για $z \in D(a, |z_0-a|)$ και $m \in \mathbb{N}$

και $a \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

$$\Rightarrow f_m : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}, \quad f_m(z) = \frac{1}{(z_0-z)^m}$$

Στο επόμενο μάθημα θα δούμε το Κεφ. 5ο.
Να διαβάσουμε για την επόμενη φορά
το 5.1 + 5.2.

<u>Μετά το μάθημα "Απορίες"</u>

<u>Θέματα 2020</u>

<u>Θέμα 2ο</u>

$$\lim_{z\to -1} \underbrace{z^{1+i}}_{=(e^{\log z})^{1+i}} = e^{(1+i)\underbrace{\log z}_{=\ln|z|+i\operatorname{Arg}z}}$$

$$= \underbrace{e^{(1+i)\ln|z|}}_{z\to -1} \cdot e^{\underbrace{(1+i)}\operatorname{Arg}z \cdot i}_{=-1+i}$$

$$= e^0.$$

- $z_n = -1 + i \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \operatorname{Arg} z_n = \pi.$
- $\tilde{z}_n = -1 - i \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \operatorname{Arg} \tilde{z}_n = -\pi$

$$\Rightarrow e^{(-1+i)\operatorname{Arg} z_n} \to e^{(-1+i)\pi}$$

$$e^{(-1+i)\operatorname{Arg}\tilde{z}_n} \to e^{(-1+i)(-\pi)}$$

$e^{\pi} \neq e^{\pi}$, όπου $|e^{(-1+i)\pi}| = e^{\pi}$, $|e^{(-1+i)(-\pi)}| = e^{\pi}$

Άρα το $\lim_{z \to -1} z^{1+i}$ $\nexists$ αφού για

$z_m = -1 \pm i\frac{1}{m} \to -1$

Προκύπτουν τα όρια $e^{(-1+i)(\pm\pi)}$ είναι διαφορετικά

Θέματα 2019 (Ιούνιος)

Θέμα 1°

Βρείτε όλα τα $z \in \mathbb{C}$ με $e^{z^2+a} = b$, $a, b \in \mathbb{C}$ σταθερά, $b \neq 0$

$\Rightarrow z^2 + a = \underbrace{\ln|b| + i(\mathrm{Arg}\,b + 2k\pi)}_{=w_k}$,

$\Leftrightarrow z^2 = w_k - a$

$\Rightarrow z = \sqrt{|w_k - a|} \cdot e^{i\frac{\mathrm{Arg}(w_k-a)}{2}} (\pm 1)$, $k \in \mathbb{Z}$

για όλα τα $k \in \mathbb{Z}$ με $w_k \neq a$ και $z = 0$ για τα $k \in \mathbb{Z}$ για τα οποία ισχύει $w_k = a$.

Σεπτέμβριος του 2019

Θέμα 1°

(β) $(h_m) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h_m \to 0 \Rightarrow \underbrace{h_m c}_{\subset \mathbb{C}^*} \to 0c$

$\left[0 \leq \underbrace{|h_m|}_{\to 0}|c| \to 0 \right]$

$\Rightarrow \underbrace{z_0 + h_m \cdot c}_{= z_m \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}} \to z_0$ $\left[|z_0 + h_m c - z_0| = |h_m||c| \to 0 \right]$

$\Rightarrow g(z_m) \to \ell$ Άρα $\forall h_m \to 0$ το $g(z_0 + h_m c) \to \ell \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} g(z_0 + hc) \to \ell$